Санкт-Петербургский государственный университет

Фундаментальная математика и механика
Теория чисел

Гордеев Алексей Сергеевич

Приложения полиномиального метода к тождествам типа Дайсона

Дипломная работа

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Петров Ф. В.

Рецензент:
к. ф.-м. н., доцент Максимов Д. В.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Fundamental Mathematics and Mechanics
Number theory

Aleksei Gordeev

Applications of polynomial method to Dyson-type identity

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
docent Fedor Petrov

Reviewer:
docent Dmitry Maksimov

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

Введение

Мы формулируем и доказываем выражение для постоянного коэффициента определённого класса лорановских многочленов, включающего в себя гипотезу Дайсона и её обобщения, сделанные Брессу и Гулденом. Мы используем явную форму комбинаторной теоремы о нулях, которая недавно применялась для нахождения других коэффициентов в [6, 7, 13, 3].

1. Комбинаторная теорема о нулях

Напомним следующую форму комбинаторной теоремы о нулях Алона (была сформулирована недавно в [10, 9, 6], но, в сущности, возвращается к Якоби [5], см. современное изложение в [8]), которая показала себя сильным инструментом (см. [6, 7, 13, 3]) для нахождения коэффициентов многочленов.

***Теорема* 1** (Комбинаторная теорема о нулях)**.** *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *многочлен степени* $\leq d_1 + \cdots + d_n$.

Рассмотрим решетку $A = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$, $\#A_i = d_i + 1$. *Коэффициент* f *при* $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$ *равняется*

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in A} \frac{f(a_1, \ldots, a_n)}{\prod_{i=1}^n \prod_{y\in A_i\setminus a_i}(a_i - y)}.$$

2. Гипотеза Дайсона и её q-обобщение

Пусть $x_1, \dots, x_n, q$ — независимые переменные. Обозначим коэффициент при $x_1^0 \dots x_n^0$ лорановского многочлена $f(x_1, \dots, x_n, q)$ за $CT[f]$.

Пусть $a_1, \dots, a_n$ — неотрицательные целые числа, $a = a_1 + \dots + a_n$. В фундаментальной работе Дайсона 1962 года [2] была сформулирована следующая гипотеза:

$$CT\left[\prod_{i\neq j}(1 - x_i/x_j)^{a_i}\right] = \frac{a!}{\prod a_i!} \tag{1}$$

Она была доказана Гансоном [неопубликовано] и Уилсоном [11] в том же году. Изящное доказательство, основанное на интерполяции методом Лагранжа, было дано Гудом [4]. Карасёв и Петров [6] предложили ещё одно доказательство, основанное на приведенной выше форме комбинаторной теоремы о нулях. Оно было обобщено до q-версии гипотезы (впервые доказана в [12] другим способом) в [7], и мы начинаем с напоминания этого результата и его доказательства.

Введём обозначение $[l, r] = \{l, l+1, \dots, r\}$. Будем заменять квадратную скобку круглой, если соответствующий конец не включен в множество, например $(l, r] = \{l+1, \dots, r-1, r\}$.

Пусть $\chi(\dots)$ равняется 1, если выражение в скобках истинно, и равняется 0 иначе.

Также, введём обозначение $(x)_n = \prod_{t=0}^{n-1}(1 - q^t x)$.

Теорема 2. *Пусть $a_1, \dots, a_n$ — неотрицательные целые числа, $a = a_1 + \dots + a_n$. Рассмотрим лорановский многочлен*

$$f(x_1, \dots, x_n, q) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i/x_j)_{a_i}(qx_j/x_i)_{a_j}.$$

Тогда

$$CT[f] = \frac{(q)_a}{(q)_{a_1}(q)_{a_2}\cdots(q)_{a_n}}.$$

Доказательство. Считаем все $a_i > 0$ (если $a_i = 0$, то в f при раскрытии скобок x_i встречается только в отрицательной степени, тогда, поскольку в интересующий нас коэффициент x_i входит в нулевой степени, можно считать, что многочлен на самом деле зависит от меньшего числа переменных).

$CT[f]$ равняется коэффициенту при $\prod_{i=1}^{n} x_i^{a-a_i}$ многочлена g, где

$$g(x_1,\dots,x_n,q) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_i/x_j)_{a_i}(qx_j/x_i)_{a_j} \times x_j^{a_i}x_i^{a_j}.$$

Мы вычислим этот коэффициент g, пользуясь комбинаторной теоремой о нулях.

Рассмотрим решётку

$$R = \{(q^{y_1},\dots,q^{y_n}) \mid 0 \le y_i \le a - a_i\}.$$

Предположим, что $x = (x_1,\dots,x_n) = (q^{y_1},\dots,q^{y_n}) = q^y \in R$ не является корнем g. Тогда для любых $i<j$ верно

$$y_j - y_i \ge a_i \text{ или } y_i - y_j \ge a_j + 1,$$

иначе один из множителей в $(x_i/x_j)_{a_i}(qx_j/x_i)_{a_j} \times x_j^{a_i}x_i^{a_j}$ окажется равен нулю.

В частности, отсюда следует, что все y_i попарно различны. Пусть $\pi \in S_n$ — такая перестановка, что

$$y_{\pi_1} < y_{\pi_2} < \dots < y_{\pi_n}.$$

Мы знаем, что

$$y_{\pi_{i+1}} - y_{\pi_i} \ge a_{\pi_i} + \chi(\pi_{i+1} > \pi_i).$$

Сложим эти неравенства, учтём, что $y_{\pi_1} \ge 0$, тогда

$$y_{\pi_n} - y_{\pi_1} \ge a - a_{\pi_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \chi(\pi_{i+1} > \pi_i).$$

Но $y_{\pi_n} \le a - a_{\pi_n}$, тогда $\pi_i > \pi_{i+1}$ для всех i, т.е. $\pi = id$.

Заметим, что все промежуточные неравенства должны были вырождиться в равенства, тогда единственная точка решётки, не являющаяся корнем многочлена — это q^y, где $y_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}$.

Осталось применить комбинаторную теорему о нулях. Введём для удобства обозначение $y_{n+1} = a$.

$$CT[f] = \left(\prod_{1 \le i < j \le n} (q^{y_i - y_j})_{a_i} (q^{y_j + 1 - y_i})_{a_j} \times q^{y_j a_i} q^{y_i a_j} \right) / \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{z \in [0, a - a_i] \setminus y_i} (q^{y_i} - q^z) \right) =$$

$$= \left(\prod_{1 \le i < j \le n} \left(\prod_{k=0}^{a_i - 1} (q^{y_j} - q^{y_i + k}) \times \prod_{k=0}^{a_j - 1} (q^{y_i} - q^{y_j + 1 + k}) \right) \right) /$$

$$/ \left(\prod_{i=1}^{n} (-1)^{y_i} \left(\prod_{t=0}^{y_i - 1} q^t \right) (q)_{y_i} q^{y_i (a - a_i - y_i)} (q)_{a - a_i - y_i} \right) =$$

$$= \left(\prod_{1 \le i < j \le n} \left((-1)^{a_i} \left(\prod_{t = y_i}^{y_{i+1} - 1} q^t \right) \frac{(q)_{y_j - y_i}}{(q)_{y_j - y_{i+1}}} \times q^{y_i a_j} \frac{(q)_{y_{j+1} - y_i}}{(q)_{y_j - y_i}} \right) \right) /$$

$$/ \left(\prod_{i=1}^{n} (-1)^{y_i} \left(\prod_{t=0}^{y_i - 1} q^t \right) (q)_{y_i - y_1} q^{y_i (a - a_i - y_i)} (q)_{y_{n+1} - y_{i+1}} \right) =$$

$$= (q)_{y_{n+1} - y_1} \Big/ \left(\prod_{i=1}^{n} (q)_{y_{i+1} - y_i} \right) = \frac{(q)_a}{(q)_{a_1} \cdots (q)_{a_n}}.$$

□

3. Теорема о турнирах

Следующим шагом мы приводим простые доказательства мастер-теоремы и её транзитивного аналога из работы Брессу и Гулдена [1], пользуясь тем же методом.

Турнир T на n вершинах — это такой набор упорядоченных пар (i,j), что $1 \le i \ne j \le n$ и $(i,j) \in T$ в том и только в том случае, если $(j,i) \notin T$. Можно рассматривать турнир как отношение на множестве $[1,n]$: $i \to j$, если $(i,j) \in T$.

Транзитивный турнир T — такой, что отношение $\to$ транзитивно. Для транзитивного турнира T победная перестановка $\sigma \in S_n$ — это такая перестановка, что $\sigma_i \to \sigma_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$.

Теорема 3. *Пусть T — турнир на n вершинах. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные целые числа, $a = a_1 + \cdots + a_n$. Рассмотрим лорановский многочлен*

$$f(x_1, \ldots, x_n, q) = \prod_{(i,j)\in T} (x_i/x_j)_{a_i} (qx_j/x_i)_{a_j-1}.$$

Тогда $CT[f] = 0$, если T не транзитивен. В случае, когда T — транзитивный турнир с победной перестановкой σ,

$$CT[f] = \frac{(q)_a}{(q)_{a_1}(q)_{a_2}\cdots(q)_{a_n}} \times \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^{a_{\sigma_i}}}{1-q^{a_{\sigma_1}+\cdots+a_{\sigma_i}}}.$$

Доказательство. Пусть $deg(i) = \#\{j \mid (i,j) \in T\}$. Рассмотрим такую перестановку $\delta \in S_n$, что для любых $1 \le i < j \le n$ $deg(\delta_i) \ge deg(\delta_j)$ и $deg(\delta_i) = deg(\delta_j)$ только когда $\delta_i < \delta_j$. Заметим, что $\sigma = \delta$ для транзитивного T.

$CT[f]$ равняется коэффициенту при $\prod_{i=1}^{n} x_i^{a-a_i-deg(i)}$ многочлена g, где

$$g(x_1, \ldots, x_n, q) = \prod_{(i,j)\in T} (x_i/x_j)_{a_i} (qx_j/x_i)_{a_j-1} \times x_j^{a_i} x_i^{a_j-1}.$$

Для вычисления этого коэффициента мы снова применим комбинаторную теорему о нулях.

Рассмотрим решётку

$$R = \{(q^{y_1}, \ldots, q^{y_n}) \mid y_i \in R_i\},$$

где

$$R_i = [0, a - a_i] \setminus S_i,$$

$$S_{\delta_i} = \{a - a_{\delta_i} - \sum_{v=j}^{n} a_{\delta_v} \mid n + 1 - deg(\delta_i) < j \leq n + 1\}.$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) = (q^{y_1}, \ldots, q^{y_n}) = q^y \in R$ не является корнем g. Для любых $(i, j) \in T$

$$y_j - y_i \geq a_i \text{ или } y_i - y_j \geq a_j,$$

иначе один из линейных множителей в $(x_i/x_j)_{a_i}(qx_j/x_i)_{a_j-1} \times x_j^{a_i} x_i^{a_j-1}$ окажется равным нулю.

Отсюда следует, что все y_i попарно различны. Пусть $\pi \in S_n$ — такая перестановка, что

$$y_{\pi_1} < y_{\pi_2} < \cdots < y_{\pi_n}.$$

Мы знаем, что

$$y_{\pi_{i+1}} - y_{\pi_i} \geq a_{\pi_i}.$$

Складывая эти неравенства и принимая во внимание, что $y_{\pi_1} \geq 0$, мы получаем

$$y_{\pi_n} - y_{\pi_1} \geq a - a_{\pi_n}.$$

Но $y_{\pi_n} \leq a - a_{\pi_n}$, тогда все промежуточные неравенства должны вырождиться в равенства и

$$y_{\pi_i} = a - \sum_{j=i}^{n} a_{\pi_j}.$$

Поскольку $y_{\pi_n} \notin S_{\pi_n}$, из определения S_{π_n} следует, что $deg(\pi_n) = 0$. Но T — это турнир, тогда $deg(i) = 0$ не более, чем для одного i. q^y не является корнем g, тогда i существует (и равняется δ_n), то есть $deg(\delta_n) = 0$ и $\pi_n = \delta_n$.

Пусть мы уже доказали, что $\pi_k = \delta_k$ и $deg(\delta_k) = n - k$ для $j < k \leq n$. Из условий на deg следует, что $(\delta_i, \delta_k) \in T$ для всех $1 \leq i < k$, $j < k \leq n$.

Тогда $deg(\delta_i) \geq n - j$ для всех $1 \leq i \leq j$, и, поскольку T — турнир, $deg(\delta_i) > n - j$ для всех $1 \leq i < j$.

$y_{\pi_j} \notin S_{\pi_j}$, поэтому $deg(\pi_j) \leq n - j$. Это возможно, только если $\pi_j = \delta_j$ и $deg(\delta_j) = n - j$.

Итак, либо все точки решётки R — это корни g и $CT[f] = 0$, либо $\pi = \delta$ и $deg(\delta_i) = n - i$ для всех i. В последнем случае неизбежно T — транзитивный и $\pi = \delta = \sigma$.

Осталось только явно вычислить коэффициент в случае транзитивного T. Мы опустим вычисления, поскольку они приведены в более общем случае в следующей теореме. $\square$

4. Главная теорема

Наш главный результат это следующая теорема.

***Теорема* 4.** *Пусть* $1 \le l_1 \le m_1 \le r_1 < l_2 \le \dots \le r_{k-1} < l_k \le m_k \le r_k \le n$,

$$B_i \subset C_i = \bigcup_{j=m_i+1}^{r_i} [l_i, j-1) \times j,$$

$$U_i = \left(B_i \cup ([l_i, m_i) \times m_i) \cup \bigcup_{j=m_i}^{r_i-1} (j, j+1) \right), U = \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

Пусть $a_1, \dots, a_n$ *— целые положительные числа,* $a = a_1 + \dots + a_n$. *Рассмотрим лорановский многочлен*

$$f(x_1, \dots, x_n, q) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i/x_j)_{a_i} (qx_j/x_i)_{a_j - \chi((i,j) \in U)}.$$

Тогда

$$CT[f] = \frac{(q)_a}{(q)_{a_1}(q)_{a_2} \cdots (q)_{a_n}} \times \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=m_i}^{r_i} \frac{1 - q^{a_j}}{1 - q^{a_{l_i} + \dots + a_j}}.$$

***Замечание* 1.** *q-версия гипотезы Дайсона является частным случаем этой теоремы при $k = 0$. Транзитивная часть теоремы о турнирах (для победной перестановки $\sigma = id$) также следует из этой теоремы при $k = 1$, $l_1 = m_1 = 1$, $r_1 = n$, $B_1 = C_1$.*

***Замечание* 2.** *Данная теорема является обобщением теоремы 2.5 из работы Брессу и Гулдена [1]. Упомянутая теорема получается из данной при $B_i = C_i$ для всех i.*

Доказательство. $CT[f]$ равняется коэффициенту при

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a - a_i - \sum_{j=1}^{n} \chi((i,j) \in U)}$$

многочлена g, где

$$g(x_1, \dots, x_n, q) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i/x_j)_{a_i} (qx_j/x_i)_{a_j - \chi((i,j) \in U)} \times x_j^{a_i} x_i^{a_j - \chi((i,j) \in U)}.$$

В очередной раз, мы вычислим этот коэффициент по комбинаторной теореме о нулях.

Рассмотрим решётку

$$R = \{(q^{y_1}, \ldots, q^{y_n}) \mid y_i \in R_i\},$$

где

$$R_i = [0, a - a_i] \setminus S_i,$$

$$S_i = \{a - a_i - \sum_{v=r_t+1}^{n} a_v\} \cup \{a - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v \mid (i,j) \in B_t\}, \text{ если } i \in [l_t, r_t) \ \exists\, t,$$

$$S_i = \emptyset \text{ иначе.}$$

Обозначим $A \rtimes B = \{(i,j) \in A \times B \mid i < j\}$.

Рассмотрим

$$N = [1,n] \rtimes [1,n], V_i = [l_i, r_i] \rtimes [m_i, r_i], V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i.$$

Заменим линейные множители g

$$(x_i - q^{a_j} x_j), \text{ где } (i,j) \in V \setminus U$$

на

$$(x_i - q^{a_j} x_j - (q^{a - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v} - q^{a - \sum_{v=j}^{n} a_v}))$$

и обозначим полученный многочлен за g'. Интересующий нас коэффициент g совпадает с соответствующим коэффициентом g', поскольку он является одним из старших по сумме степеней x_i, а многочлены отличаются лишь константами в линейных множителях.

Пусть

$$\chi_1(i,j) = \chi\left((i,j) \in V \setminus U \text{ и } y_i = a - a_i - \sum_{v=j}^{n} a_v \text{ и } y_j = a - \sum_{v=j}^{n} a_v\right).$$

Пусть $x = q^y \in R$ не является корнем g', тогда для любых $i < j$ либо $y_j - y_i \geq a_i + \chi_1(i,j)$, либо $y_i - y_j \geq a_j + \chi((i,j) \in N \setminus V)$ (иначе один из линейных множителей g' окажется равным нулю).

Отсюда следует, что все y_i попарно различны. Пусть $\pi \in S_n$ — такая перестановка, что

$$y_{\pi_1} < y_{\pi_2} < \dots < y_{\pi_n}.$$

Мы знаем, что

$$y_{\pi_{i+1}} - y_{\pi_i} \geq a_{\pi_i} + \chi((\pi_{i+1}, \pi_i) \in N \setminus V) + \chi_1(\pi_i, \pi_{i+1}).$$

Складывая эти неравенства и принимая во внимание, что $y_{\pi_1} \geq 0$, мы получаем

$$y_{\pi_n} \geq a - a_{\pi_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \chi((\pi_{i+1}, \pi_i) \in N \setminus V) + \chi_1(\pi_i, \pi_{i+1}).$$

Но $y_{\pi_n} \leq a - a_{\pi_n}$, поэтому $(\pi_{i+1}, \pi_i) \notin N \setminus V$ и $\chi_1(\pi_i, \pi_{i+1}) = 0$ для всех i.

Заметим, что все промежуточные неравенства должны выродиться в равенства, поэтому

$$y_{\pi_i} = a - \sum_{j=i}^{n} a_{\pi_j}.$$

Будем называть ситуацию $\pi_{i+1} < \pi_i$ спуском, тогда спуск возможен только при $(\pi_{i+1}, \pi_i) \in V$. Из определения V следует, что спуски бывают только при $\pi_i, \pi_{i+1} \in [l_t, r_t]$ для какого-то t. Тогда для любого t все элементы π из $[l_t, r_t]$ должны идти подряд, все элементы меньше них должны идти до них, а все элементы больше — после.

Покажем, что элементы $[l_t, r_t]$ в перестановке должны идти не просто подряд, а в порядке возрастания, тогда единственной возможной перестановкой будет $\pi = id$.

Если $\pi_{r_t} \in [l_t, r_t)$, то

$$y_{\pi_{r_t}} = a - a_{\pi_{r_t}} - \sum_{j=r_t+1}^{n} a_{\pi_j} = a - a_{\pi_{r_t}} - \sum_{j=r_t+1}^{n} a_j,$$

что противоречит определению $R_{\pi_{r_t}}$. Значит $\pi_{r_t} = r_t$.

Пусть $s \geq m_t$ и мы уже доказали, что $\pi_{s+1} = s+1, \dots, \pi_{r_t} = r_t$. Предположим, что $\pi_s < s$.

$\chi_1(\pi_s, \pi_{s+1}) = \chi_1(\pi_s, s+1) = 0$. Кроме того,

$$y_{\pi_s} = a - a_{\pi_s} - \sum_{j=s+1}^{n} a_j, y_{s+1} = a - \sum_{j=s+1}^{n} a_j$$

а $(\pi_s, s+1) \in V$, тогда из определения χ_1 следует, что $(\pi_s, s+1) \in U$. $\pi_s < s$, поэтому $(\pi_s, s+1) \in B_t$. Но

$$y_{\pi_s} = a - a_{\pi_s} - \sum_{j=s+1}^{n} a_j,$$

что противоречит определению R_{π_s}. Значит $\pi_s = s$.

Итак, мы доказали, что $\pi_{m_t} = m_t, \ldots, \pi_{r_t} = r_t$. Но из определения V спуски при $\pi_i, \pi_{i+1} \in [l_t, m_t)$ невозможны, поэтому все элементы $[l_t, m_t)$ также расположены по возрастанию.

Таким образом $\pi = id$, единственная точка решётки R, не являющаяся корнем g', это $x = q^y$, где $y = (0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_{n-1})$.

Посмотрим, какие изменения произошли по сравнению с вычислением коэффициента в доказательстве q-версии гипотезы Дайсона. Для удобства обозначим $y_{n+1} = a$.

Зафиксируем $1 \le t \le k$.

Во-первых, из множеств R_i ($l_t \le i < r_t$) пропали элементы S_i, благодаря чему коэффициент увеличился в

$$\left(\prod_{i=l_t}^{r_t-1} \left(q^{y_i} - q^{a-a_i-\sum_{v=r_t+1}^{n} a_v}\right)\right) \times \prod_{(i,j)\in B_t} \left(q^{y_i} - q^{a-a_i-\sum_{v=j}^{n} a_v}\right)$$

раз.

Во-вторых, появился линейный множитель

$$(x_i - q^{a_j} x_j - (q^{a-a_i-\sum_{v=j}^{n} a_v} - q^{a-\sum_{s=j}^{n} a_v}))$$

для всех $(i,j) \in V_t \setminus U_t = C_t \setminus B_t$, благодаря чему коэффициент увеличился в

$$\prod_{(i,j)\in C_t \setminus B_t} \left(q^{y_i} - q^{y_{j+1}} - (q^{a-a_i-\sum_{v=j}^{n} a_v} - q^{a-\sum_{v=j}^{n} a_v})\right) =$$

$$= \prod_{(i,j)\in C_t\setminus B_t} \left(q^{y_i} - q^{a-a_i-\sum_{v=j}^{n} a_v}\right)$$

раз.

В-третьих, пропал линейный множитель $(x_i - q^{a_j}x_j)$ для всех $(i,j) \in V_t$, поэтому коэффициент уменьшился в

$$\prod_{(i,j)\in V_t} (q^{y_i} - q^{y_{j+1}})$$

раз.

Итого коэффициент увеличился в

$$\prod_{i=l_t}^{r_t-1} \left(q^{y_i} - q^{a-a_i-\sum_{v=r_t+1}^{n} a_v}\right) \times \prod_{(i,j)\in C_t} \left(q^{y_i} - q^{a-a_i-\sum_{v=j}^{n} a_v}\right) /$$

$$/ \left(\prod_{(i,j)\in V_t} (q^{y_i} - q^{y_{j+1}})\right) =$$

$$= \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} \left(q^{y_i} - q^{a-a_i-\sum_{v=j+1}^{n} a_v}\right) / \left(\prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} (q^{y_i} - q^{y_{j+1}})\right) =$$

$$= \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} \left(1 - q^{a_{i+1}+\dots+a_j}\right) / \left(\prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} (1 - q^{a_i+\dots+a_j})\right) =$$

$$= \prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t+1}^{j} \left(1 - q^{a_i+\dots+a_j}\right) / \left(\prod_{j=m_t}^{r_t} \prod_{i=l_t}^{j-1} (1 - q^{a_i+\dots+a_j})\right) =$$

$$= \prod_{j=m_t}^{r_t} \frac{1 - q^{a_j}}{1 - q^{a_{l_t}+\dots+a_j}}$$

раз.

Осталось перемножить результат по $1 \le t \le k$. $\square$

Заключение

В рамках данной работы получены следующие результаты:

- Приведено существенно более короткое доказательство мастер-теоремы и её транзитивного аналога из работы Брессу и Гулдена [1].
- Обобщена теорема 2.5 из той же работы [1].

Список литературы

[1] Bressoud D. M., Goulden I. P. Constant term identities extending the q-Dyson theorem // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 291. — P. 203–228.

[2] Dyson F.J. Statistical theory of energy levels of complex systems. I // J. Math. Phys. — 1962. — Vol. 3. — P. 140–156.

[3] Ekhad Shalosh B., Zeilberger D. How to Extend Károlyi and Nagy's BRILLIANT Proof of the Zeilberger-Bressoud q-Dyson Theorem in order to Evaluate ANY Coefficient of the q-Dyson Product. — http://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/qdyson.html.

[4] Good I.J. Short proof of a conjecture by Dyson // J. Math. Phys. — 1970. — Vol. 11. — P. 1884.

[5] Jacobi K. G. Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum // J. Reine Angew. Math. — 1835. — Vol. 14. — P. 281–288.

[6] Karasev R. N., Petrov F. V. Partitions of nonzero elements of a finite field into pairs // Israel J. Math. — 2012. — Vol. 192 (1). — P. 143–156.

[7] Károlyi Gyula, Nagy Zoltán Lóránt. A simple proof of the Zeilberger-Bressoud q-Dyson theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 2014. — Vol. 142. — P. 3007–3011.

[8] Kunz E., Kreuzer M. Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections // J. reine angew. Math. — 1987. — Vol. 381. — P. 181–204.

[9] Lasoń M. A generalization of Combinatorial Nullstellensatz // Electron. J. Combin. — 2010. — Vol. 17 (1), no. N32.

[10] Schauz U. Algebraically solvable problems: describing polynomials as equivalent to explicit solutions // Electron. J. Combin. — 2008. — Vol. 15, no. R10.

[11] Wilson K. G. Proof of a conjecture by Dyson // J. Math. Phys. — 1962. — Vol. 3. — P. 1040–1043.

[12] Zeilberger D., Bressoud D. M. A proof of Andrews' q-Dyson conjecture // Discrete Math. — 1985. — Vol. 54. — P. 201–224.

[13] A new approach to constant term identities and Selberg-type integrals / G. Károlyi, Z.-L. Nagy, F. V. Petrov, V. Volkov // Adv. Math. — 2015. — Vol. 277. — P. 252–282.